ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III 1.GRUP 2.QUİZ SORULARI

1) $x_k \in \mathbb{R}^n$, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| \leq 1$ ve (x_k) dizisi yakınsak olsun. Eğer $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ ise $\|x\| \leq 1$ olduğunu gösteriniz. $\|x\| < 1$ olur mu? Açıklayınız.

2) $x \in \overline{A} - A$ ise $x \in \partial A$ olduğunu gösteriniz. Tersi doğru mudur? Bir örnekle açıklayınız.

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y \leq 0\} \cup \{(2,0)\}$ kümesini çiziniz. $A^\circ, A', \overline{A}, \partial A$ ve $dışA$ kümelerini bulunuz. A kümesinin açık küme ve kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz.

4) a) $a_n = \left(\sin^2 \dfrac{\pi}{n^3+n}, \dfrac{e^{1/5n}}{n}, \arctan\left(-\sqrt{n} + \dfrac{1}{12^n}\right)\right)$ genel terimli $(a_n) \subset \mathbb{R}^3$ dizisinin limitini bulunuz, karakterini belirleyiniz.

b) $\mathbb{R}^2$ de $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^{5/2} + \sqrt[3]{n}}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^2\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Not: Sınav **06.01.2021** Çarşamba günü **13:30-14:45** arasında gerçekleşecektir. Süre 75 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

2020–2021 EĞİTİM-ÖĞRETİM YILI MAT211

ANALİZ III 1. GRUP 2. QUİZ ÇÖZÜMLERİ

1) $x_k \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x\| \leq 1$ ve $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ olsun.

$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ $\mathbb{R}^n$ de orjin merkezli, 1 yarıçaplı kapalı yuvar gözönüne alınsın.

B nin kapalı olduğu gösterilirse ispat biter.

$\mathbb{R}^n - B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$, $\forall y \in \mathbb{R}^n - B$ alalım. $\Rightarrow \|y\| > 1$ dir.

$0 < \varepsilon < \|y\| - 1$ olsun.

iddia: $B(y, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - B$ dir:

$\underline{\forall z \in B(y, \varepsilon)} \Rightarrow \|y - z\| < \varepsilon \Rightarrow \|y\| - 1 > \varepsilon > \|y - z\| \geq \|y\| - \|z\|$

$\Rightarrow \|y\| - 1 > \|y\| - \|z\| \Rightarrow -\|z\| < -1 \Rightarrow \|z\| > 1 \Rightarrow \underline{z \in \mathbb{R}^n - B}$

$\Rightarrow$ iddia doğru olup, $\mathbb{R}^n - B$ açık dolayısıyla

B kümesi kapalıdır.

$\|x_k\| \leq 1$ olduğundan $x = (x_k) \subset B$ dir. $\lim_{k\to\infty} x_k = x$

ve B kapalı olduğundan $x \in B$ dir. Yani $\|x\| \leq 1$ dir.

$\|x\| < 1$ olamaz. Çünkü $\mathbb{R}$ de $x_k = 1 - \frac{1}{k}$ olmak üzere (x_k) dizisini alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| < 1$ dir,

fakat $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$ dir. ($x = 1$ olup, $\|x\| \leq 1$ dir.)

2) $x \in \bar{A} - A$ olsun. $\bar{A} - A \neq \emptyset$ olsun. (Aksi halde açıktır)

$x \in \bar{A} - A$ ve $\forall \varepsilon > 0$ alalım.

$\Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n - A$ olduğundan, $\underline{B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset}$ dir.

ve ($\underline{x \in \bar{A}} = A \cup A'$ olduğundan da) $x \in A'$ dir.

Burada $\forall \varepsilon > 0$, $(B(x, \varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ve $x \notin A$ old.

$\forall \varepsilon > 0$, $\underline{B(x, \varepsilon) \cap A} \neq \emptyset$ dir.

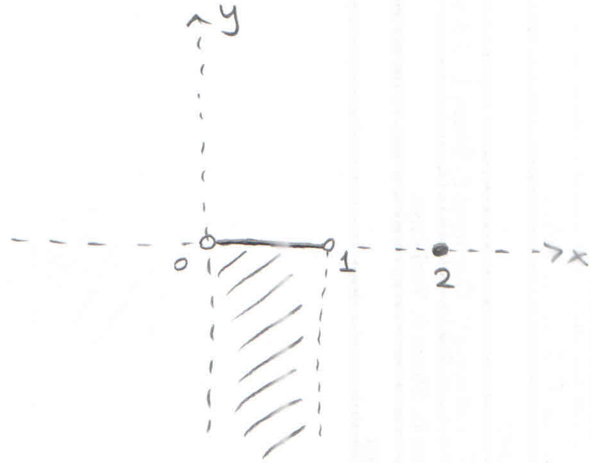
Dolayısıyla $x \in \partial A$ olur. Tersi doğru değildir.

Örneğin $A = \{x \in [0,1] \mid x$ rasyonel ? $\}$ olsun.

$\partial A = [0,1]$ dir. Buradan $1/2 \in \partial A$ fakat $1/2 \notin \bar{A} - A$ dır.

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y \leq 0\} \cup \{(2,0)\}$ kümesini çiziniz. A°, A', $\bar{A}$, ∂A ve dış A kümelerini bulunuz. A kümesinin açık ve kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:



$A^\circ = ?$

i) $(2,0) \in A$ için $B((2,0),\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yoktur, dolayısıyla $(2,0) \notin A^\circ$ dir.

ii) $y=0$, $0<x<1$ olsun. Bu durumda $B((x,0),\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yoktur, dolayısıyla $(x,0) \notin A^\circ$ dir.

iii) $y<0$, $0<x<1$ olsun. $\varepsilon = \min\{-y, x, 1-x\}$ seçilirse $B((x,y),\varepsilon) \subset A$ olur, dolayısıyla $(x,y) \in A^\circ$ dır.

O halde $A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ y < 0\}$ dır. $A^\circ \neq A$ olduğundan A açık küme değildir.

$A' = ?$

i) $\left(B((2,0),\tfrac{1}{2}) - \{(2,0)\}\right) \cap A = \emptyset$ olduğundan $(2,0) \notin A'$ dır.

ii) $y \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\left(B((x,y),\varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $(x,y) \in A'$ dır.

O halde $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y \leq 0\}$ dır.

$\bar{A} = A \cup A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y \leq 0\} \cup \{(2,0)\}$

$\bar{A} \neq A$ olduğundan A kapalı küme değildir.

$\partial A = \bar{A} - A^\circ = \{(2,0)\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\} \cup \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$

dış $A = (\bar{A})^c = \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y \leq 0\}\right) - \{(2,0)\}$

4)

a) $a_n = \left(\sin^2 \frac{\pi}{n^3+n}, \frac{e^{1/5n}}{n}, \arctan\left(-\sqrt{n} + \frac{1}{12^n}\right) \right)$ genel terimli $(a_n) \subset \mathbb{R}^3$ dizisinin limitini bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n^3+n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{1/5n}}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \arctan\left(-\sqrt{n} + \frac{1}{12^n}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} a_n = \left(0, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{5/2} + \sqrt[3]{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin n}{n^{5/2} + \sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{n^{5/2} + \sqrt[3]{n}} < \frac{1}{n^{5/2}} \\ \sum \frac{1}{n^{5/2}} \text{ yakınsak (p-testinden)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{5/2} + \sqrt[3]{n}} \text{ yakınsak}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2\left(\frac{1}{\ln n}\right) = 1 \neq 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ serisi ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri ıraksaktır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 211 ANALİZ III 2.GRUP 2.QUİZ SORULARI

1) $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ olsun.

a) Değme (limit) noktaları ile yığılma noktaları arasındaki fark nedir? Örnekler veriniz.

b) $x \in A'$ ise x noktasının A nın bir değme (limit) noktası olduğunu gösteriniz. Bu ifadenin tersi doğru mudur? Açıklayınız.

2) $A \subset \mathbb{R}$ ise $\partial A = \partial(\mathbb{R} - A)$ olduğunu gösteriniz. Bir örnek üzerinde bunu geometrik olarak gösteriniz.

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, x \le 0\} \cup \{(0,2)\}$ kümesini çiziniz. $A^\circ, A', \overline{A}, \partial A$ ve $dışA$ kümelerini bulunuz. A kümesinin açık küme ve kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz.

4) a) $a_n = \left(n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{2/n}\right), \arcsin\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\right)$ genel terimli $(a_n) \subset \mathbb{R}^3$ dizisinin limitini bulunuz, karakterini belirleyiniz.

b) $\mathbb{R}^2$ de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\sin n)^n}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz, nedenini açıklayınız.

Not: Sınav **06.01.2021** Çarşamba günü **15:00-16:15** arasında gerçekleşecektir. Süre 75 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI

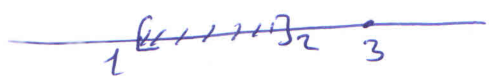
MAT211 ANALİZ III 2. GRUP 2. QUİZ ÇÖZÜMLERİ

1) $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ olsun.

a) x noktasına A nın bir limit noktası (değme noktası) denir :⟺ $\forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dır.

x, A nın yığılma noktasıdır :⟺ $\forall \varepsilon > 0, (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

$A = [1,2] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$,



$A' = [1,2]$ dır, $\text{değ}\, A = [1,2] \cup \{3\}$ dır.

$\forall x \in \text{değ}\, A \Rightarrow x \in A'$ dır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

b) $x \in A'$ ise $\forall \varepsilon > 0, (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ dır. Burada

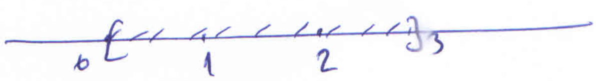
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur.

2) $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \partial A = \partial(\mathbb{R} - A)$ dır:

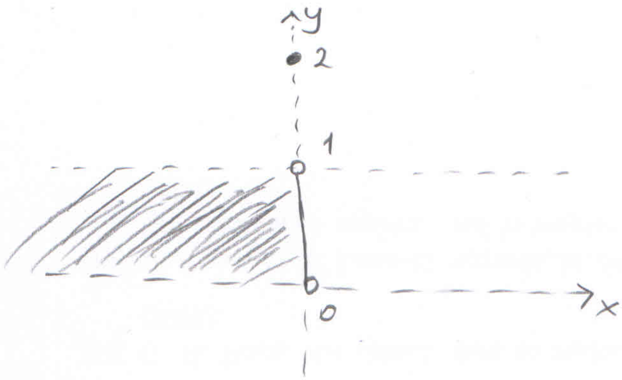
$\partial A = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}-A)}$ ve $\partial(\mathbb{R}-A) = \overline{(\mathbb{R}-A)} \cap \overline{(\mathbb{R}-(\mathbb{R}-A))}$

$\partial(\mathbb{R}-A) = \overline{(\mathbb{R}-A)} \cap \bar{A} = \partial A$ dır.

$A = [0,3]$, $\partial A = \{0,3\}$, $\mathbb{R} - A = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ olup $\partial(\mathbb{R}-A) = \{0,3\}$ dır.



3-) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0<y<1,\ x \le 0\} \cup \{(0,2)\}$

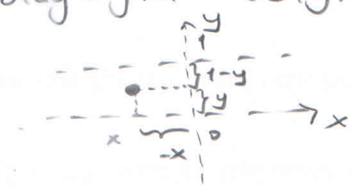


$A^\circ = ?$

i) $(0,2) \in A$ için $B((0,2),\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yoktur, dolayısıyla $(0,2) \notin A^\circ$ dir.

ii) $x=0,\ 0<y<1$ olsun. Bu durumda $B((0,y),\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ yoktur, dolayısıyla $(0,y) \notin A^\circ$ dir.

iii) $x<0,\ 0<y<1$ olsun.



$\varepsilon = \min\{y, 1-y, -x\}$ seçilirse $B((x,y),\varepsilon) \subset A$ olur, dolayısıyla $(x,y) \in A^\circ$ dir.

O halde $A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0<y<1,\ x<0\}$ dir.

$A' = ?$

i) $\left(B((0,2),\tfrac{1}{2}) - \{(0,2)\}\right) \cap A = \emptyset$ olduğundan $(0,2) \notin A'$ dir.

ii) $0 \le y \le 1,\ x \le 0$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\left(B((x,y),\varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $(x,y) \in A'$ dir.

O halde $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ x \le 0\}$ dir.

$\bar{A} = A \cup A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ x \le 0\} \cup \{(0,2)\}$

$\partial A = \bar{A} - A^\circ = \{(0,2)\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0<y<1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0\}$

$\text{dış} A = (\bar{A})^c = \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y<0,\ x \le 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>1,\ x \le 0\}\right) - \{(0,2)\}$

$A \neq A^\circ$ olduğundan A kümesi açık değildir.

$\bar{A} \neq A$ olduğundan A kümesi kapalı değildir.

4-) a) $a_n = \left(n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{2/n}\right),\ \arcsin\left(\ln \frac{n+1}{n}\right) \right)$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{2/n}\right) \overset{\infty.0}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} - e^{2/n}}{\frac{1}{n}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\sin\frac{1}{n}\right)\frac{-1}{n^2} - e^{2/n}\cdot\left(\frac{-2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2} + e^{2/n}\cdot\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right) + 2e^{2/n}$$

$$= -2$$

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin\left(\ln\frac{n+1}{n}\right) = \arcsin 0 = 0$$

Böylece (a_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = (-2, 0)$ dır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\sin n)^n}{n^2}, \frac{1}{n^2} \right)$

$\frac{(\sin n)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ p-testinden yakınsak

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^n}{n^2}$ yakınsaktır.

$\sum \frac{1}{n^2}$ $p = 2$ p-testinden yakınsaktır.

Dolayısıyla verilen seri $\mathbb{R}^2$ de yakınsaktır.